Р. Г. Мухарлямов (Москва)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решение вариационных задач с ограничениями, исследование динамики несвободных механических и электромеханических систем приводит к системе, состоящей из дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \nu} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + F^T\lambda, \quad V = \dot{q}, \tag{1}$$

$$q = (q_1, \ldots, q_n),\ L = L(\nu, q, t),\ Q = Q(\nu, q, t),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$
$$F = (f_{ij}), \quad i = \overline{1, r},\ j = \overline{1, n},$$

и уравнений связей

$$f(q, t) = 0, \quad f'(\nu, q, t) = 0, \tag{2}$$

$$f = (f_1, \ldots, f_m),\ f' = (f_{m+1}, \ldots, f_r),\ f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j},\ i = \overline{1, m},$$
$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \nu_j},\ i = \overline{m+1, r}.$$

Уравнения (1) и (2) составляют систему дифференциально–алгебраических уравнений индекса 3 (ДАУ–3) относительно неизвестных q, λ. Система (1), (2) может быть приведена к ДАУ–2

$$\frac{dx}{dt} w(x, t) + B(x, t)\lambda, \quad g(x, t) = 0. \tag{3}$$

ДАУ вида (1) — (2) или (3) привлекают серьезное внимание исследователей в последние годы. Разработке методов решения ДАУ посвящено значительное число работ. Для обеспечения устойчивости решения ДАУ–3 предлагается учитывать отклонения от уравнений связей (2):

$$f(q, t) = \alpha, \quad f'(\nu, q, t) = \alpha', \tag{4}$$

$$\ddot{\alpha} = a(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', \nu, q, t), \quad \dot{\alpha}' = a'(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', \nu, q, t). \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) различного назначения были введены в работах А. Пуанкаре, Т. Леви-Чивита, У. Амальди и в работе [1] основателя Казанской школы устойчивости Н. Г. Четаева. Их можно рассматривать как уравнения программных связей и уравнений возмущений связей [2]. Соответствующее уравнение связей ДАУ-2 заменяется системой

$$g(x,t) = \beta, \quad \dot{\beta} = b(\beta, x, t).$$

Решение ДАУ состоит из двух этапов. На первом этапе из уравнений (3), (6) определяется вектор λ. Второй этап заключается в решении дифференциального уравнения с определенным λ и соответствующими начальными или граничными условиями. Определение выражения равносильно построению системы дифференциальных уравнений по заданным частным интегралам [3, 4]. Последняя задача имеет неоднозначное решение. Правые части искомых дифференциальных уравнений содержат произвольные функции, которые можно использовать для обеспечения устойчивости связей $g(x,t) = 0$ и для других целей. Критерий устойчивости основывается на методе функций Ляпунова. Соответствующий выбор уравнений связей и правых частей дифференциальных уравнений дает решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений (ОЗ КТДУ), поставленной М. И. Алмухаметовым.

Задачи построения дифференциальных уравнений, имеющих сложные особые точки, рассматривались С. В. Волковым. Решение ОЗ КТДУ используется также для составления уравнений неголономных программных связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. *О вынужденных движениях. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.* — М.: Изд. АН СССР, 1962. — С. 329 - 335.

2. Мухарлямов Р. Г. *Об уравнениях кинематики и динамики несвободных механических систем* // Вестник РУДН, сер. "Прикладная математика и информатика". — 2000. — N 1. — С. 24 - 32.

3. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кри-*

вую // ПММ. — 1952. — Т. XXI, вып. 6. — С. 659 - 670.

4. Мухарлямов Р. Г. *О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию* // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, № 10. — С. 1825 - 1834.

Р. Г. Мухарлямов (Москва)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система дифференциально-алгебраических уравнений

$$\dot{x} = w(x,t) + B(x,t)\lambda, \quad f(x,t) = 0, \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = c\left[f_x C\right] + f_x^+ \left(Pf - f_t\right), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $[f_x C]$ — векторное произведение. Определяются условия, накладываемые на скаляр c и матрицы C, P, для того, чтобы решение системы удовлетворяло уравнению связей $f(x,t) = 0$ с заданной точностью.

Теорема 1. *Существуют такие постоянные* $\alpha, \tau_1, \varepsilon$ *и матрица* $P(x,t)$, *что при выполнении неравенств*

$$\|f^0\| \le \varepsilon, \quad \tau \le \tau_1, \quad \|E + \tau P(x,t)\| \le \alpha < 1,$$

$$\tau_1^2 \left\|f^{(k2)}\right\| \le 2(1-\alpha)\varepsilon, \quad f^{(k2)} = v^T f_{xTx} v + \varepsilon f_{xt} v + f_{tt}, \quad v = \dot{x},$$

решение разностного уравнения

$$x^{k+1} = x^k + \tau v^k, \quad x^k = x(t_k). \quad f^k = f(x^k, t_k), \quad t_{k+1} = t_k + \tau,$$

удовлетворяет условию $\left\|f^k\right\| \le \varepsilon$ *при всех* $k \ge 1$.

Теорема 2. *Если для решения уравнения (1) используется разностная схема*

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad \Delta x^k = \tau(1-\sigma)v^k + \sigma\overline{v}^k, \quad \sigma > 0,$$